

Оригинальная статья / Original paper

<https://doi.org/10.30758/0555-2648-2025-71-3-318-333>

УДК 551.326.7 (268.52+268.53)



О распределении основных морфометрических характеристик торосистых образований

В.В. Харитонов✉

ГНЦ РФ Арктический и антарктический научно-исследовательский институт,
Санкт-Петербург, Россия

✉kharitonov@aari.ru

BVX, 0000-0003-1847-9980

Аннотация. В ряде публикаций, связанных с информацией об основных морфометрических характеристиках торосов (высоте паруса, осадке киля и толщине консолидированного слоя), представлен широкий спектр мнений об их распределениях. При оценке вероятности экстремальных редких событий разные законы распределения могут привести к существенным отличиям. Вид распределения, по-видимому, в первую очередь определяется количеством торосов и стамух, исследованных в той или иной экспедиции, т. е. размерами выборки. В данной статье предпринята попытка систематизировать различные мнения и внести некоторую определенность в этот вопрос. В основу положены результаты измерения толщины ровного арктического льда с борта российских судов и ледоколов с помощью цифрового телевизионного комплекса. Они показывают, что распределение толщины льда является нормальным. На основе известных соотношений между параметрами строения торосов, а также с применением метода Монте-Карло получены статистические распределения высоты паруса и толщины консолидированного слоя торосов. В результате выполненных расчетов выявлены некоторые закономерности их распределения. Толщина торосающегося льда подчиняется экспоненциальному закону распределения. Высота паруса, осадка киля и толщина консолидированного слоя торосов подчиняются распределению Вейбулла–Гнеденко.

Ключевые слова: торос, стамуха, парус, киль, консолидированный слой, распределение Вейбулла–Гнеденко

Для цитирования: Харитонов В.В. О распределении основных морфометрических характеристик торосистых образований. *Проблемы Арктики и Антарктики*. 2025;71(3):318–333. <https://doi.org/10.30758/0555-2648-2025-71-3-318-333>

Поступила 31.07.2025

После переработки 26.08.2025

Принята 15.09.2025

© Авторы, 2025

© Authors, 2025

Distributions of the main morphometric characteristics of ridged features

Victor V. Kharitonov✉

*State Scientific Center of the Russian Federation Arctic and Antarctic Research Institute,
St. Petersburg, Russia*

✉kharitonov@aari.ru

 VVK, 0000-0003-1847-9980

Abstract. From the 1970s to the present time, a great deal of field work and analysis has been done on the physical and mechanical properties of sea ice ridges. Sail and keel thicknesses have almost always been measured in the field expeditions. Emphasis is placed on the thickness of the consolidated layer (CL) within the ridge. This paper was motivated by a number of new findings on the distributions of the main morphometric characteristics of ice ridges. The wide range of opinions about the distributions is, apparently, primarily due to the number of ice ridges and stamukhas studied in the different expeditions, i.e., the sample size. This article attempts to systematize the various opinions and add some clarity to the matter. It focuses on the development of approaches to determining the statistical distributions of the main morphometric parameters of first-year ice ridges: sail height, keel depth and consolidated layer thickness. Measurements of ice cover thickness were carried out in 2006–2009 from Russian vessels and icebreakers using a digital television complex. The distribution of first-year ice thickness along the navigation route of vessels shows that Arctic ice is normally distributed with a mathematical expectation of 1.24 m and a standard deviation (RMS) of 0.34 m. The histogram of ridging ice thickness in the Arctic region presented in L. Strub-Klein and D. Sudom' review and based on a large data set is satisfactorily approximated by the exponential distribution law. It is known from literature sources that sail heights scale with the square root of ice thickness. One of the properties of the exponential distribution is as follows: if a random variable (the thickness of ridging ice) adheres to the exponential distribution, then the random variable "sail height" connected with the thickness of ridging ice has the Weibull–Gnedenko distribution. The ice ridge keel draft can be also shown as adhering to the Weibull–Gnedenko distribution. If we compare the formation process of the sail of ice ridges and stamukhas, it can be concluded that the energy of these processes is similar. Therefore, it can be presumed that the distribution of stamukha sails is also the Weibull–Gnedenko distribution. As for the distribution of the stamukha keel, it also adheres to the Weibull–Gnedenko distribution, since the stamukha draft is determined by the keel draft of an ice ridge which ran aground in shallow water and became its embryo. When considering the distribution of the CL thickness, let us use Høyland's formula, which gives a direct correspondence between the rubble porosity and the CL and level ice thickness. We shall generate an array of pairs of random level ice thickness values normally distributed with a mathematical expectation of 1.24 m and RMS of 0.34 m. We shall assume that the porosity is constant and equal to $\eta = 0.23$. For each pair values, we will calculate the CL thickness corresponding to them from Høyland's formula and plot a histogram of the resulting array of values. The best approximation of the histogram is the normal distribution with a mathematical expectation of 1.82 and RMS of 0.88. However, given the gradual reduction of the keel porosity the normal distribution transforms into the Weibull–Gnedenko distribution. Thus, as a result of the simulations performed, a certain pattern of distribution of the sail height, keel draft and the CL thickness of ice ridges has been revealed. The thickness of the ridging ice obeys the exponential distribution law. The height of the sail, the draft of the keel and the thickness of the consolidated layer of ice ridges obey the Weibull–Gnedenko distribution.

Keywords: ice ridge, stamukha, sail, keel, consolidated layer, Weibull–Gnedenko distribution

For citation: Kharitonov V.V. Distributions of the main morphometric characteristics of ridged features. *Arctic and Antarctic Research*. 2025;71(3):147–333. (In Russ.). <https://doi.org/10.30758/0555-2648-2025-71-3-318-333>

Received 31.07.2025

Revised 26.08.2025

Accepted 15.09.2025

Введение

С 1970-х гг. XX в. и по настоящее время было проведено большое количество полевых работ по изучению торосов из морского льда. Их результаты были проанализированы с акцентом на физико-механические свойства торосов, которые были обобщены с точки зрения их влияния на судоходство и морские сооружения. Основные морфометрические характеристики торосов, такие как высота паруса и осадка киля, почти всегда измеряются во время полевых экспедиций. Особое внимание также уделяется толщине консолидированного слоя (КС)¹ в торосе, который является одним из ключевых факторов при определении ледовой нагрузки на сооружения. Эта статья была вызвана рядом публикаций, связанных с распределением основных морфометрических характеристик торосов. Еще в прошлом веке Дж. Крейдер и М. Тор изучали статистику высоты паруса торосов в море Бофорта и определили, что она подчиняется экспоненциальному распределению [1]. М. Сайед и Р. Фредеркинг после обработки результатов исследования 37 поперечных сечений трех торосов (9, 10 и 18 сечений) в море Бофорта обнаружили, что максимальная величина паруса для каждого отдельного тороса распределена нормально [1]. Однако если значения высоты торосов на всех сечениях объединить в единый массив, то высота уже подчиняется логнормальному распределению. На экспоненциальное распределение высоты парусов указывают Г.А. Сурков и П.А. Трусков². В частности, они упоминают распределение, предложенное В. Хиблером в 1972 г. [2]. Российские ледоисследователи еще лет десять назад отдавали предпочтение логнормальному распределению и для паруса, и для киля тороса. Это прослеживается в статьях, посвященных результатам инженерных изысканий на шельфе окраинных морей России, выполненных по заказу нефтяных компаний, например [3–5]³. Однако в последнее время в связи с появлением новых данных статистические распределения разнятся. В статье, посвященной морфометрическим характеристикам стамух, рассмотрено распределение высоты их парусов и осадки килей и отмечено, что эти величины подчиняются распределению Вейбулла–Гнеденко [6]. Исключение составляет высота парусов стамух моря Лаптевых — она распределена логарифмически нормально. Этот же коллектив авторов в статье, посвященной морфометрическим особенностям торосов, отмечает, что высота парусов торосов подчиняется также распределению Вейбулла–Гнеденко, а осадка килей — логарифмически нормальному⁴. Мнения, что осадка килей торосов распределена по Вейбуллу–Гнеденко, придерживаются

¹ Консолидированный слой торосистого образования — это слой плотного (твердого) льда с верхней границей в районе ватерлинии, образовавшийся в результате воздействия холода и замерзания воды в промежутках между блоками всторошенного льда и включающий в себя эти блоки, с прочностью, близкой к прочности ровного льда.

² Surkov G.A., Truskov P.A. Morphometric parameters of ice ridges in the Sea of Okhotsk. *Proc. of the 18th Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE'99). St. John's, Newfoundland, Canada, 1999, July 11–16. OMAE99–1128.*

³ Naumov A.K., Gudoshnikov Yu.P., Skutina E.A. Determination of the design ice ridge based on data of expedition studies in the northeastern Barents Sea. *Proc. of the 16th Int. Offshore and Polar Eng. Conf. (Lisbon, Portugal, July 1–6 2007).*

⁴ Guzenko R.B., Mironov Ye.U., May R.I., et al. Morphometric particularities of ice ridges with the greatest thickness of the consolidated layer and other statistical patterns of morphometry of first-year ice ridges. *Proc. of the 31st Int. Ocean and Polar Engineering Conf. (Rhodes, Greece, June 20–25, 2021).*

А.К. Наумов⁵ и авторы работы о статистике однолетних торосов [7]. Б. Марцеллус и др.⁶ считают, что распределение осадки килей торосов — это гамма-распределение.

Распределение общей толщины торосов иногда считают нормальным [8], иногда — логнормальным [10]. Что касается стамух, то распределение их общей толщины подчиняется логнормальному закону [9]⁷. Однако по данным исследований последних лет распределение общей толщины торосов ближе к гамма-распределению⁸.

Средние по всем точкам бурения значения высоты паруса, осадки киля и общей толщины распределены логарифмически нормально⁸.

С распределением толщины КС еще меньше ясности. Е.У. Миронов и В.С. Порубаев указывают на логнормальный закон распределения КС⁹. В последующей работе этих авторов о торосах Карского моря толщина КС распределена нормально [5]. А.К. Наумов и др.¹⁰ для разных регионов Байдарацкой губы отмечают логнормальное распределение толщины КС и распределение Вейбулла–Гнеденко. В работе о региональных особенностях торосов приведены распределения толщины КС в разных регионах Карского моря и моря Лаптевых¹¹. Среди них распределение Вейбулла–Гнеденко, нормальное и гамма-распределение. В обобщении результатов отмечено, что в Карском море толщина КС подчиняется гамма-распределению, а в море Лаптевых — нормальному распределению. В другой работе объединенные данные по обоим морям подчиняются распределению Вейбулла–Гнеденко [10].

С распределениями толщины КС стамух подобная картина. Толщина КС стамух Карского моря распределена логнормально, а в море Лаптевых — по Вейбуллу–Гнеденко [6, 9]. Логнормально распределена также толщина КС стамух в Каспийском море, а по Вейбуллу–Гнеденко — в Охотском море [9].

В работах, посвященных статистической обработке информации об однолетних торосах, показано, что толщина КС подчиняется гамма-распределению [7, 11].

⁵ Наумов А.К. *Морфометрические характеристики ледяных образований Баренцева моря*. Автореферат дисс. на соискание уч. ст. канд. геогр. наук. СПб.: ААНИИ; 2010. 12 с.

⁶ Marcellus B., McKenna R., McGonigal D., Pilkington R. Old ice floe and ridge statistics from submarine upward looking sonar data for the Beaufort, Chukchi and Arctic seas. *Proc. of the 21st Int. Conf. on POAC'11, 2011*.

⁷ Mironov Ye.U., Porubayev V.S. Structural peculiarities of ice features on the offshore of the Caspian Sea, the Sea of Okhotsk and the Pechora Sea. *Proc. of the 18th Int. Conf. on Port and Ocean Engineering under Arctic Condition. (POAC) (Potsdam, New York, 26–30 June 2005)*. V. 2. P. 483–492

⁸ Guzenko R.B., Mironov Ye.U., May R.I., et al. Morphometric particularities of ice ridges with the greatest thickness of the consolidated layer and other statistical patterns of morphometry of first-year ice ridges. *Proc. of the 31st Int. Ocean and Polar Engineering Conf. (Rhodes, Greece, June 20–25, 2021)*.

⁹ Mironov Ye.U., Porubayev V.S. Structural peculiarities of ice features on the offshore of the Caspian Sea, the Sea of Okhotsk and the Pechora Sea. *Proc. of the 18th Int. Conf. on Port and Ocean Engineering under Arctic Condition. (POAC) (Potsdam, New York, 26–30 June 2005)*. V. 2. P. 483–492

¹⁰ Naumov A.K., Skutina E.A., Golovin N.V., Kubyshkin N.V., Buzin I.V., Gudoshnikov Yu.P., Skutin A.A. Peculiarities of morphometric features and inner structures of the ridged formations in the Ob' Bay. *Proc. of the 29th Int. Ocean and Polar Engineering Conference ISOPE'19 (Honolulu, Hawaii, USA, June 16–21)*. P. 684–690.

¹¹ Guzenko R.B., Mironov Ye.U., Kharitonov V.V. et al. Regional differences and general patterns of ice ridges morphometric characteristics distribution in the Kara and Laptev Seas. *Proc. of the 30th (2020) Int. Ocean and Polar Engineering Conf. (Shanghai, China, October 11–16, 2020)*. P. 789–795.

Это утверждение подкреплено не только графиком, но и приведенным численным значением коэффициента детерминации.

Такой широкий спектр распределений, по-видимому, в первую очередь определяется количеством торосов и стамух, исследованных в той или иной экспедиции, т. е. размерами выборки. Необходимо иметь в виду, что все вышеперечисленные параметры торосов к тому же изменяются со временем. Автора, как, наверное, и многих других ледоисследователей, всегда занимали вопросы: почему законы распределения тех или иных морфометрических характеристик разные для разных лет, разных морей, а то и для участков морей? От чего это зависит? Какие механизмы ответственны за это? Применение того или иного распределения может существенно изменить результаты расчетов, например, возможных экстремальных значений основных морфометрических характеристик торосистых образований. В данной статье предпринята попытка систематизировать различные мнения и внести некоторую определенность в этот вопрос. В представленной работе автор в основном использовал сведения из обзорных публикаций, в которых сделано обобщение информации из разных источников.

Статистические модели для ключевых параметров тороса

Ровный лед

Поскольку торосы в основном образуются в результате деформации ровного льда, в первую очередь внимание должно быть сосредоточено на нем. По-видимому, наиболее полные сведения о толщине ровного арктического льда приведены коллективом авторов под руководством С.В. Фролова в статье о результатах наблюдений ледяного покрова [12]. Измерения проводились в 2006–2009 гг. с борта российских судов и ледоколов с помощью разработанного в Арктическом и антарктическом НИИ (ААНИИ) цифрового телевизионного комплекса. Основной маршрут

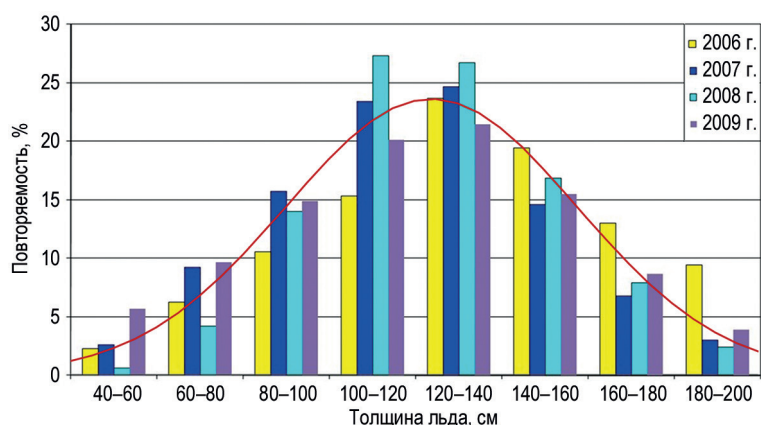


Рис. 1. Распределение толщины однолетних льдов на пути плавания судов в июле 2006–2009 гг. [12]. Гистограмма аппроксимирована нормальным законом распределения с мат. ожиданием 1,24 м и стандартным отклонением 0,34 м

Fig. 1. Distribution of first-year ice thickness on the navigation route of vessels in July 2006–2009 [12]. The histogram is approximated by the normal distribution law with an expected value of 1.24 m and a standard deviation of 0.34 m

«Земля Франца-Иосифа — Северный полюс» пересекал западную часть трансарктического дрейфа льдов — одного из главных элементов циркуляции льдов в Арктическом бассейне. Судовые трассы носили преимущественно меридиональный характер в секторе $40\text{--}60^\circ$ в. д. Общий объем составил более 55 000 измерений толщины ровного льда. Для исключения влияния избирательного характера движения ледокола (судна) при оценке распределения толщины льда использовались специальные процедуры [12]. На рис. 1 приведено распределение толщины однолетних льдов на пути плавания судов.

Эта гистограмма наилучшим образом аппроксимируется гауссовской кривой, т. е. арктический лед распределен нормально с мат. ожиданием 1,24 м и среднеквадратическим отклонением (СКО) 0,34 м. Функция распределения вероятности (PDF), полученная по методу наименьших квадратов, добавлена на рис. 1. Похожие результаты получены во время наблюдения за толщиной припайного льда в Печорском море¹². Это важный вывод, на котором можно строить дальнейшие рассуждения. Несомненно, характеристики распределения изменяются год от года и даже от месяца к месяцу, как это показано в статье С.В. Фролова и др. [12]. Но, судя по гистограмме на рис. 1, закон распределения остается неизменным. С формальной точки зрения это усеченное нормальное распределение с левой границей области возможных значений случайной величины, равной нулю¹³.

Очевидно, что в первую очередь торошению подвергаются молодые и тонкие льды. Начальные виды льда чаще всего подвергаются деформации, но в этом случае происходит многократное наложение [13], и только после смерзания слоев этот лед вновь начинает участвовать в торошении. То есть вероятность, что торосить будет в первую очередь тонкие льды, максимальна. И чем толще лед, тем вероятность для льда подвергнуться торошению будет уменьшаться. Рассмотрим ситуацию, при которой в каком-то месте океана происходит торошение. Возникает вопрос — какова вероятность, что торосится лед именно толщины h ? Чтобы попытаться ответить на него, возьмем за основу толщину блоков льда в парусе торосов, которая является хорошим индикатором толщины торосящегося льда. Изменение толщины блоков в парусе под действием ветровой эрозии и солнечной радиации¹⁴ брать во внимание не будем. В аналитическом обзоре морфологии однолетних торосов Л. Страб-Клейн и Д. Судома приведена гистограмма толщины торосящегося льда в арктическом регионе, построенная на большом массиве данных [11]. На рис. 2 приведено распределение повторяемости толщины блоков на основе данных из этого обзора. Исходя из физического смысла данного явления, самой простой и наилучшей аппроксимацией его, полученной по методу наименьших квадратов, является экспоненциальный закон распределения. Выборка не очень большого объема может быть аппроксимирована распределениями разных типов. И даже, возможно, какое-нибудь экзотическое распределение будет еще лучшей аппроксимацией, но в данном случае — чем проще, тем

¹² Mironov Ye.U., Porubayev V.S. Structural peculiarities of ice features on the offshore of the Caspian Sea, the Sea of Okhotsk and the Pechora Sea. *Proc. of the 18th Int. Conf. on Port and Ocean Engineering under Arctic Condition. (POAC) (Potsdam, New York, 26–30 June 2005)*. V. 2:483–492.

¹³ Вадзинский Р.Н. *Справочник по вероятностным распределениям*. СПб.: Наука; 2001. 295 с.

¹⁴ Strub-Klein L., Høyland K. One season of a 1st year sea ice ridge investigation — winter 2009. *Proc. of the 21st Int. Conf. on POAC'11 (Montréal, Canada, 2011)*. Paper No. POAC11–043.

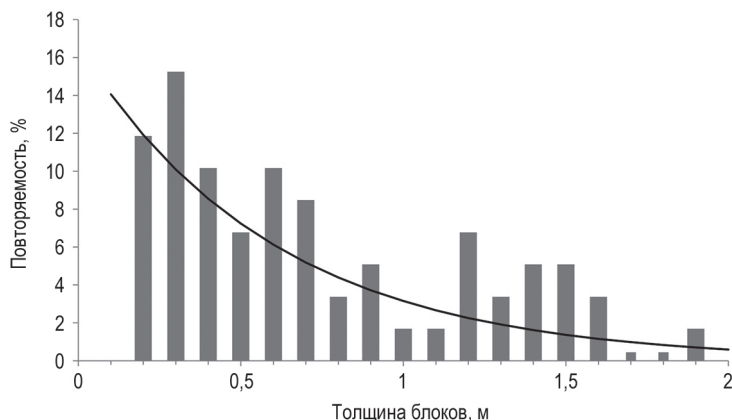


Рис. 2. Гистограмма толщины блоков льда в парусе торосов арктического региона, построенная на основе данных из [11] и аппроксимированная экспоненциальным законом распределения с мат. ожиданием 0,60 м. Для аппроксимации значения частоты преобразованы в доли от общего числа случаев

Fig. 2. Histogram of block thicknesses. The histogram of the Arctic region is obtained by the data of [11] and approximated by the exponential distribution law with an expected value of 0.60 m. For the approximation, the frequency values are converted to fractions of the total number of cases

лучше. К тому же некоторые распределения при определенных параметрах сводятся к экспоненциальному. Отсутствие данных в градации толщины 0–0,1 м не должно влиять на выбор закона распределения, т. к. лед такой толщины, как уже говорилось, при сжатии начинает наплаиваться. К тому же небольшие торосы из тонкого (0,08–0,10 м) льда обычно не привлекают внимания ледоисследователей и выпадают из статистики. Торос из такого льда толщиной 0,08 м наблюдался автором в 2016 г. в припае пролива Шокальского [14]. Согласно аппроксимации, математическое ожидание равняется 0,60 м. Отметим, что математическое ожидание плюс стандартное отклонение полученного экспоненциального распределения составляет величину 1,20, что довольно близко к математическому ожиданию распределения ровного льда 1,24 м.

Парус тороса

У. Хиблер предложил функцию для максимальной высоты паруса тороса в виде квадратного корня из толщины торосащегося льда [15]. У. Такер и Дж. Говони проанализировали толщину блоков льда в парусе торосов и то, как она связана с высотой паруса [16]. Они также сделали вывод, что высота парусов, по-видимому, зависит от квадратного корня из толщины льда. По их мнению, в то время как линейная или экспоненциальная кривая может лучше соответствовать данным в статистическом смысле, закон квадратного корня кажется более подходящим, поскольку он позволяет высоте стремиться к нулю вместе с толщиной. В приложении к статье У. Такера и Дж. Говони приведена геометрическая модель высоты паруса (ridge height geometry model), подтверждающая предложенную зависимость [16]. Л. Страб-Клейн и Д. Судом в своем обзоре приводят несколько аппроксимаций для соотношения максимальной высоты паруса и средней толщины блоков [11]. Они также считают оптимальной зависимость в виде квадратного корня из средней толщины блоков. Эти

аппроксимации практически мало отличаются друг от друга, поэтому здесь можно привести оптимальное, по их мнению, соотношение:

$$H_s = 3,73\sqrt{h_b}, \quad (1)$$

где H_s — высота паруса, h_b — средняя толщина блоков льда в парусе. Будем считать, что h_b соответствует толщине торсящегося льда h . Основанием для этого могут быть следующие допущения. В случае, когда тонкий лед торсится на более толстый, происходит разрушение преимущественно тонкого льда и $h_b = h$. Если толщина торсящихся ледяных полей не сильно отличается, в парусе тороса находится примерно одинаковое количество блоков из разных ледяных полей и $\bar{h}_b \approx \bar{h}$.

Одно из свойств экспоненциального распределения гласит: если случайная величина $h = (H_s/3,7)^2$ (преобразованное соотношение (1) с учетом $h_b = h$) подчиняется экспоненциальному распределению с параметром $\lambda = 1$, то случайная величина H_s имеет распределение Вейбулла–Гнеденко с параметром масштаба, равным 3,7, и параметром формы, равным 2^{15} . Можно показать, что, если h подчиняется экспоненциальному распределению с параметром $\lambda = 1/0,60 \approx 1,67$, параметр масштаба распределения Вейбулла–Гнеденко будет $a = 3,7\lambda^{-0,5} = 2,87$. Математически это означает, что, несмотря на то что наиболее вероятно торошение тонких льдов, формирование маленьких парусов крайне маловероятно.

Консолидированный слой

При рассмотрении распределения толщины КС воспользуемся соотношением Хойланда, которое дает прямое соответствие между толщиной КС, толщиной ровного льда у тороса и пористостью неконсолидированной части кия [17]:

$$H_{CL}^2 = H_{CL0}^2 + \frac{H_{LI}^2 - H_{LI0}^3}{\eta}, \quad (2)$$

где H_{CL} — толщина КС, H_{CL0} — толщина КС в момент времени t_0 (например, толщина КС в момент окончания торошения), H_{LI} — толщина ровного льда, H_{LI0} — толщина ровного льда в момент времени t_0 , η — пористость неконсолидированной части кия. В момент окончания торошения разрушенные блоки находятся на уровне моря, но они разрозненны, не связаны между собой, поэтому никакого консолидированного слоя нет. КС начинает формироваться с момента окончания торошения, т. е. до этого момента блоки могут двигаться друг относительно друга и смирзания как такового не происходит. Как только движение блоков прекращается, за счет притока холода из атмосферы между блоками появляется слой льда бесконечно малой толщины, и он уже скрепляет блоки в один непрерывный слой. Средняя толщина его уже не бесконечно малая, а конечная за счет включения блоков. С этого момента можно считать его зарождающимся консолидированным слоем. С математической точки зрения функция толщины КС в нулевой момент времени t_0 , если это момент, когда закончилось торошение и началась консолидация тороса, делает скачок от нуля до некоторого неизвестного значения, определяемого толщиной и конфигурацией блоков льда на уровне ватерлинии, т. е. терпит разрыв первого рода. Поскольку рассматривается вероятностная модель на основе математических формул, правомерно

¹⁵ Вадзинский Р.Н. *Справочник по вероятностным распределениям*. СПб.: Наука; 2001. 295 с.

взять одно из значений функции толщины КС при $t_0 = 0$. Из двух значений известно только одно, а именно равное нулю, его и принимаем в расчет. Таким образом, соотношение (2) преобразуется к виду

$$H_{CL} = \sqrt{\frac{H_{LI}^2 - H_{LI0}^2}{\eta}}. \quad (3)$$

В дальнейшем можно рассмотреть и результаты расчетов с другими, гипотетическими значениями начальной толщины КС. В 2022 г. К. Хойланд являлся рецензентом одной из статей автора и отметил в рецензии, что к моменту окончания торошения и начала консолидации тороса КС имеет ненулевую толщину, и хотя не дал каких-либо ее количественных оценок, но допустил для оценок толщины КС использование соотношения (3).

Толщина торосящегося льда в момент торошения H_{LI0} , как уже говорилось, подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром 1,67 при условии следующих ограничений, вытекающих из здравого смысла: $0,08 < H_{LI0} < 1,85$ (больше зафиксированной минимальной толщины торосящегося льда и меньше значений, повторяемость которых согласно гистограмме рис. 1 меньше 5 %). Толщина ровного льда вокруг тороса в момент измерения H_{LI} подчиняется нормальному закону распределения с мат. ожиданием 1,24 м и СКО, равным 0,34 м. По какому закону будет

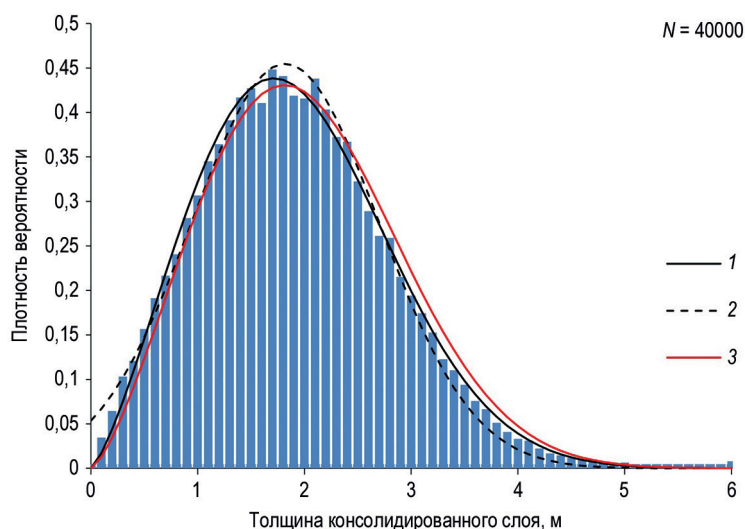


Рис. 3. Гистограмма толщины КС: 1 — аппроксимация распределением Вейбулла–Гнеденко с параметрами $m = 2,33$ и $s = 2,18$; 2 — аппроксимация усеченным нормальным законом распределения с мат. ожиданием $m = 1,82$ и стандартным отклонением $s = 0,88$; 3 — распределение Вейбулла–Гнеденко толщины КС, построенное по 3830 скважинам в 105 торосах, $m = 2,40$ и $s = 2,27$ [10]. N — количество значений

Fig. 3. Histogram of CL thickness: 1 — approximation by the Weibull–Gnedenko distribution law with parameters of scale $m = 2.33$ and shape $s = 2.18$; 2 — approximation by the truncated normal distribution law with an expected value of $m = 1.82$ and a standard deviation of $s = 0.88$; 3 — Weibull–Gnedenko distribution of CL thickness obtained by 3,830 boreholes in 105 ice ridges, $m = 2.40$ and $s = 2.27$ [10]. N — number of values

распределена толщина КС H_{CL} ? Для выяснения этого вопроса проведем следующий численный эксперимент. Сгенерируем массив пар случайных значений $H_{LI} > H_{L0}$. Так как момент измерения КС всегда позже по времени момента торосообразования, эти значения являются коррелированными (коэффициент корреляции около 0,70), но это не влияет на результат эксперимента. Автор в своей работе о пористости торосов пролива Шокальского приводит эмпирическую зависимость средней пористости неконсолидированного кия от глубины: $\eta = 0,007z + 0,225$, где z — глубина, м [18]. Воспользовавшись этой информацией, будем считать для определенности пористость постоянной и равной $\eta = 0,23$. Для каждой пары случайных значений H_{LI} и H_{L0} ($H_{LI} > H_{L0}$) рассчитаем соответствующее им значение H_{CL} согласно формуле (3) и построим гистограмму полученного массива значений (рис. 3). Лучшей аппроксимацией гистограммы является PDF нормального распределения с мат. ожиданием $m = 1,82$ и стандартным отклонением $s = 0,88$. Интересно, что еще более хорошей аппроксимацией будет PDF усеченного нормального распределения с теми же параметрами. Левая граница области возможных значений случайной величины H_{CL} равна нулю. Аппроксимирующая кривая показана на рис. 3 пунктирной линией.

Уменьшение средней пористости неконсолидированного кия до значения $\eta = 0,20$ приводит к смещению гистограммы в область больших толщин КС. Мат. ожидание становится равным 1,95 м, а СКО — 0,94 м.

Норвежские ученые, исследовавшие процесс «дряхления» однолетних торосов, полагают, что пористость неконсолидированного кия постепенно уменьшается в течение всей жизни тороса и этот процесс ускоряется в период летнего таяния [19]. Однако в статье не дается никаких оценок интенсивности этого уменьшения. Расчетные оценки такого уменьшения пористости приводят А.С. Шестов и А.В. Марченко в работе о термодинамической консолидации кия торосов [20]. Согласно этим расчетам, уменьшение пористости зависит от начальной пористости, и если в начале пористость кия составляет 0,4–0,5, то к началу таяния может уменьшиться почти в два раза. Чтобы оценить влияние уменьшения пористости в течение жизни тороса на распределение толщины КС, введем в соотношение (2) зависимость пористости η от времени жизни тороса. Вид этой зависимости неизвестен, известно только, что пористость уменьшается. Исходя из этого, в первом приближении будем считать, что пористость равномерно уменьшается со временем. Время жизни тороса в нашем численном эксперименте можно оценить только по величине нарастания ровного льда вокруг него. Автор на дрейфующей станции СП-38 в течение года наблюдал изменение среднего значения и СКО толщины льда на ледовом полигоне (рис. 4а) [21]. Взяв обратную функцию и аппроксимировав ее степенной функцией (рис. 4б), получим, что время наблюдения, или время, за которое толщина ровного льда достигнет заданного значения, примерно пропорционально квадрату толщины ровного льда у тороса. Основываясь на этой информации, уменьшение пористости кия будем рассчитывать пропорционально времени наблюдения, или квадрату изменения толщины ровного льда:

$$\eta = -A(H - H_{L0})^2 + 0,23, \quad (4)$$

где H — толщина ровного льда в период между образованием тороса и моментом измерения толщины КС ($H_{L0} \leq H \leq H_{LI}$). То есть начальная пористость будет составлять 0,23, а уменьшаться до 0,10 в зависимости от разности между конечной

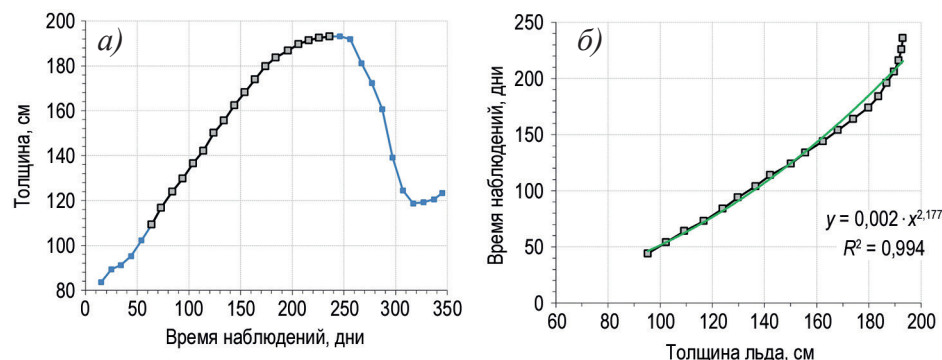


Рис. 4. Толщина льда на ледовом полигоне дрейфующей станции СП-38 [21].

а) Временное изменение среднего значения толщины льда. Выделен промежуток с декабря по май. б) Обратная функция выделенного фрагмента и ее аппроксимация степенной функцией

Fig. 4. Ice thickness at the ice polygon of the drifting station “North Pole-38” [21].

а) Temporal change in the average ice thickness. Period from December to May is highlighted; б) Inverse function of marked fragment and its approximation by power function. Equation of the approximation and coefficient of determination are presented

и начальной толщиной ровного льда. Коэффициент A варьировался в указанных пределах ($0,03 \leq A \leq 0,07$), чтобы выяснить его влияние на вид распределения расчетной толщины КС.

В результате построение распределения толщины КС по описанной выше процедуре показало, что небольшое постепенное уменьшение пористости не влияет на вид распределения и оно остается нормальным усеченным распределением. Однако при увеличении коэффициента A в формуле (4) хвост распределения увеличивается и оно вырождается в распределение Вейбулла–Гнеденко (см. рис 3, кривая 1). Близость полученной таким образом выборки и аналитического выражения для распределения Вейбулла–Гнеденко была также подтверждена с помощью критерия χ^2 Пирсона. $\chi^2 = 0,68$ для этого распределения, что много меньше, чем для других распределений (1,80... 6,20).

Обсуждение результатов

Парус и киль

На конференции ISOPE в 2021 г. была представлена работа с результатами анализа большого количества торосов ($n = 104$), в которой сделан подобный вывод, что высота паруса торосов подчиняется распределению Вейбулла–Гнеденко¹⁶. Однако этот вывод противоречит следующему утверждению в этой же работе, которое гласит, что средние значения высоты паруса торосов (среднее по всем измерениям превышения льда в пределах паруса вдоль профиля поперечного сечения тороса) распределены логнормально. В предыдущей работе этого же коллектива авторов

¹⁶ Guzenko R.B., Mironov Ye.U., May R.I., et al. Morphometric particularities of ice ridges with the greatest thickness of the consolidated layer and other statistical patterns of morphometry of first-year ice ridges. *Proc. of the 31st Int. Ocean and Polar Engineering Conf. (Rhodes, Greece, June 20–25, 2021)*.

приведен профиль бурения торосов, а также отмечено, что согласно методике бурения с обеих сторон от точки максимального паруса бурились две дополнительные скважины на расстоянии 2,5 м (обычный интервал — 5 м) [10]. Включение этих дополнительных скважин в осреднение приводит к методической ошибке, а именно к завышению среднего значения осредняемой величины. Особенно это заметно при больших значениях высоты парусов. По-видимому, эта методическая ошибка и приводит к сомнительному выводу в этой работе, что распределение средней высоты паруса подчиняется логнормальному распределению. Согласно гипотезе о треугольной форме паруса среднее значение высоты паруса равняется половине от максимального значения, следовательно, также подчиняется распределению Вейбулла–Гнеденко.

В работе Ю.П. Гудошникова и др. о морфометрических характеристиках ледяных образований приведена гистограмма распределения высоты парусов 42 торосов Печорского моря, исследованных в 1996–2003 гг. [3]. Авторы утверждают, что гистограмма хорошо аппроксимируется логарифмически нормальным законом распределения (рис. 5). Но набор данных (выборка) не очень большого объема может быть аппроксимирован распределениями разных типов. Например, гистограмма так же хорошо аппроксимируется и распределением Вейбулла–Гнеденко. Коэффициент детерминации (R^2) аппроксимации логарифмически нормальным законом распределения составляет 0,858, а для распределения Вейбулла–Гнеденко — 0,851. Тем не менее по критерию Пирсона в данном случае более подходящим все же оказывается логнормальный закон распределения.

Если сравнить схемы формирования паруса торосов¹⁷ и стамух¹⁸, а также при- нять во внимание процессы развития этих ледяных образований, рассмотренные в монографии С.А. Вершинина и др. о воздействии льда на сооружения Сахалин- ского шельфа [22], то можно заключить, что совершаемая ледяным покровом ме- ханическая работа по формированию нагромождения блоков льда в парусе этих образований подобна. Несмотря на то, что затраты энергии на формирование паруса тороса и паруса стамухи существенно различаются в силу различного характера формирования плавучего нагромождения и нагромождения, опирающегося на дно, в обоих случаях процесс торошения будет остановлен из ограниченной величины прижимной силы [22]. Поэтому можно утверждать, что и распределение парусов стамух также является распределением Вейбулла–Гнеденко. В работе Е.У. Миро- нова и др. о морфометрии и внутренней структуре стамух это подтверждается для стамух Карского моря [9].

Принимая во внимание следующие факторы:

- формирование киля происходит по подобному сценарию, что и паруса [22];
- наилучшей аппроксимацией для зависимости осадки киля от толщины бло- ков льда в парусе является степенная функция (например, квадратный корень);
- по данным исследования 265 торосов с участием автора линейная и степен- ная аппроксимации связи высоты паруса и осадки киля в информативном диапазоне практически совпадают, и для простоты эту связь можно считать линейной, — можно

¹⁷ Kovaks A., Sodhi S.D. Ice pile-up and ride-up on Arctic and subarctic beaches. *Proc. of the POAC'79, 1979, v. 1*. p. 127–146.

¹⁸ Crocker G., Ritch A., Nilsen R. Some observations of ice features in the North Caspian Sea. *Proc. of the 21st Int. Conf. on POAC'11 (July 10–14 2011, Montréal, Canada)*.

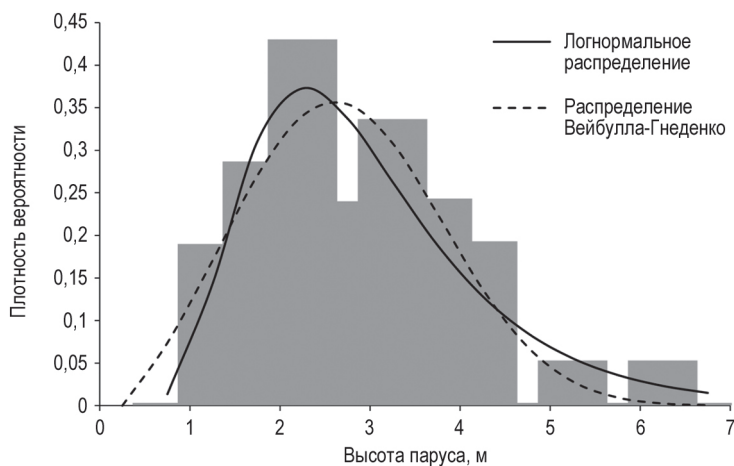


Рис. 5. Гистограмма высоты паруса торосов Печорского моря 1996–2003 гг., построенная по данным работы [3] и аппроксимированная логарифмически нормальным распределением и распределением Вейбулла–Гнеденко

Fig. 5. Histogram of the sail height of the Pechora Sea ice ridges 1996–2003, obtained on the data of [3]. It is approximated by the lognormal and Weibull–Gnedenko distributions

заключить, что глубина осадки киля торосов также подчиняется распределению Вейбулла–Гнеденко, но, соответственно, с другими параметрами [см., например, 7]. Это также относится и к распределению средней осадки киля торосов. Хотя обычно считается, что осадка киля торосов распределена логнормально [см., например, 4].

Что касается распределения киля стамух, то они также подчиняются распределению Вейбулла–Гнеденко, поскольку глубина осадки стамухи определяется глубиной осадки киля тороса, севшего на мель на мелководье и ставшего ее зародышем.

Распределение общей толщины тороса, среднего значения общей толщины, а также отношение киль/парус также подчиняются распределению Вейбулла–Гнеденко.

Влияние фактора времени на вероятностные распределения геометрических параметров ледяных образований требует дополнительного изучения. Исследования торосов обычно проводятся весной в период максимального развития ледяного покрова, поэтому торосы, подвергшиеся интенсивному таянию в летний период, выпадают из рассмотрения.

Консолидированный слой

Гистограмма распределения толщины КС торосов, аппроксимированная гамма-распределением, приведена в работе норвежских ученых, посвященной статистике однолетних торосов [7]. Для сравнения на диаграмму нанесена также и PDF распределения Вейбулла–Гнеденко (рис. 6). Аппроксимация данной выборки наиболее оптимальна гамма-распределением. Из параметров гамма-распределения можно заключить, что мат. ожидание равняется 1,60 м, а мода распределения — 1,03 м. То есть наиболее часто встречались торосы с КС толщиной около метра. Мат. ожидание распределения Вейбулла–Гнеденко равняется 1,67 м. Согласно критерию Пирсона для гамма-распределения $\chi^2 = 0,15$, а для распределения Вейбулла–Гнеденко $\chi^2 = 0,09$, т. е. распределение Вейбулла–Гнеденко адекватнее описывает данную гистограмму.

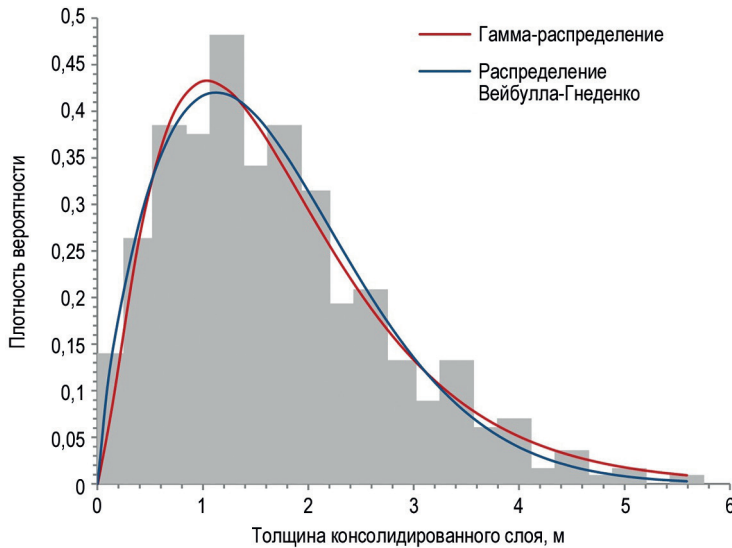


Рис. 6. Гистограмма толщины КС, построенная на основе данных из работы [7] и аппроксимированная гамма-распределением и распределением Вейбулла–Гнеденко

Fig. 6. Histogram of CL thickness. It is obtained based on the data of [7] and approximated by the Gamma distribution and the Weibull–Gnedenko distribution

Соотношение Хойланда (3) предполагает спокойное термическое нарастание толщины КС. Однако в реальности маленькие, недавно образовавшиеся торосы из тонкого льда часто вскоре подвергаются новому процессу уже вторичного торошения. Так они выпадают из зоны внимания ледоисследователей и исключаются из получаемых выборок. Эта ситуация наглядно продемонстрирована на рис. 6, когда гамма-распределение фактически исключает существование торосов с совсем небольшим КС. В то время как распределение Вейбулла–Гнеденко показывает довольно существенную вероятность наличия торосов с такой толщиной КС. Например, вероятность того, что толщина КС окажется менее 0,4 м, согласно гамма-распределению составляет 8,6 %, а по распределению Вейбулла–Гнеденко — 9,7 %. А вероятность, что толщина КС окажется менее 0,14 м, по гамма-распределению составляет 1,1 %, а по распределению Вейбулла–Гнеденко — 1,9 %, то есть почти в два раза больше. Аналогичную картину можно наблюдать и на рис. 5.

По данным работы А.К. Наумова и др.¹⁹ о морфометрии торосистых образований Обской губы, толщина КС торосов в этом регионе распределена по Вейбуллу–Гнеденко. В работе Р.Б. Гузенко и др. о морфометрии и внутренней структуре торосов приведена гистограмма толщины КС, построенная по 3830 скважинам в 105 торосах Карского моря и моря Лаптевых и аппроксимированная распределением Вейбулла–Гнеденко [10]. Аппроксимирующая кривая с этими параметрами приведена

¹⁹ Naumov A.K., Skutina E.A., Golovin N.V., Kubyshkin N.V., Buzin I.V., Gudoshnikov Yu.P., Skutin A.A. Peculiarities of morphometric features and inner structures of the ridged formations in the Ob' Bay. *Proc. of the 29th Int. Ocean and Polar Engineering Conference ISOPE'19 (Honolulu, Hawaii, USA, June 16-21)*. P. 684–690.

для сравнения на рис. 3. Рисунок подтверждает, что оценка распределения толщины КС адекватно отражает реальную ситуацию. В остальных публикациях на эту тему предложены другие законы распределения. По-видимому, в этой ситуации большую роль играет неосознанное следование устоявшимся мнениям, т. к. довольно часто в литературных источниках упоминается логнормальное распределение.

Заключение

Вопрос начальной толщины КС остается открытым. Если в качестве начальной толщины взять значение, равное половине значения начальной толщины ровного льда, то результат моделирования показывает, что распределение остается распределением Вейбулла–Гнеденко. Однако такое ограничение приводит к тому, что вероятность толщины КС меньше 0,4 м практически нулевая, что не соответствует действительности. Что касается выбора верхней границы толщины торосающегося льда, равной 1,85 м, то следует отметить, что значение верхней границы слабо влияет на вид распределения. Повышение верхней границы отразится на незначительном повышении левой части гистограммы толщины КС, соответствующей тонкому КС.

В результате выполненной работы можно сделать следующие выводы:

- Исходя из физической сущности торошения, толщина торосающегося льда подчиняется экспоненциальному закону распределения.

- Есть основания предположить, что высота паруса, осадка киля и толщина КС торосов подчиняются одному закону распределения — распределению Вейбулла–Гнеденко.

Эти знания с опорой на практический опыт позволят адекватно моделировать ледяной покров при расчете процессов теплообмена между океаном и атмосферой, определять возможные экстремальные значения морфометрических характеристик торосистых образований.

Конфликт интересов. Автор статьи не имеет конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 25-27-00389.

Competing interests. The author has no competing interests.

Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation, project no. 25-27-00389.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Sayed M., Frederking R.M.W. Measurement of ridge sails in the Beaufort Sea. *Canadian J. of Civil Eng.* 1989;16(1):16–21.
2. Hibler W.D. III, Weeks W.F., Mock S.J. Statistical aspects of sea-ice ridge distributions. *J. Geophys. Res.* 1972;77:5954–5970.
3. Гудошников Ю.П., Зубакин Г.К., Наумов А.К. Морфометрические характеристики ледяных образований Печорского моря по многолетним экспедиционным данным. *Труды РАО–03*. СПб.; 2003. С. 295–299.
4. Гудошников Ю.П., Зубакин Г.К., Наумов А.К. Статистические характеристики элементов торосистых образований. В кн.: *Ледяные образования морей Западной Арктики*. СПб.: ААНИИ; 2006. С. 88–99.
5. Миронов Е.У., Порубаев В.С. Статистическая модель морфометрии гряды тороса в юго-западной части Карского моря. *Проблемы Арктики и Антарктики*. 2011;3(89):49–61.
Mironov Ye.U., Porubayev V.S. Statistical model of ice ridge morphometry in the southwestern part of the Kara Sea. *Problemy Arktiki i Antarktiki = Arctic and Antarctic Research*. 2011;3(89):49–61. (In Russ.).

6. Mironov Ye.U., Guzenko R.B., Porubaev V.S., Kharitonov V.V., Khotchenkov S.V., Nesterov A.V., Kornishin K.A., Efimov Ya.O. Morphometric parameters of stamukhas in the Laptev Sea. *Int. J. of Offshore and Polar Engineering*. 2019;29(4):383–390.
7. Chai W., Leira B.J., Naess A., Høyland K., Ehlers S. Development of environmental contours for first-year ice ridge statistics. *Structural Safety*. 2020;87:101996.
8. Миронов Е.У., Клячкин С.В., Порубаев В.С. Морфометрические характеристики гряд торосов и стамух по данным натурных наблюдений и модельных расчетов в северо-западной части Каспийского моря. *Труды РАО–09*. СПб.; 2009. С. 280–285.
9. Миронов Е.У., Гузенко Р.Б., Порубаев В.С., Харитонов В.В., Корнишин К.А., Ефимов Я.О. Морфометрия и внутренняя структура стамух в замерзающих морях России. *Метеорология и гидрология*. 2020;4:62–73.
Mironov Ye.U., Guzenko R.B., Porubaev V.S., Kharitonov V.V., Kornishin K.A., Efimov Ya.O. Morphometry and internal structure of stamukhas in the ice-covered seas of Russia. *Russian Meteorology and Hydrology*. 2020;45(4):260–268. <https://doi.org/10.3103/S1068373920040068>
10. Guzenko R.B., Mironov Ye.U., Kharitonov V.V., May R.I., Porubaev V.S., Khotchenkov S.V., Kornishin K.A., Efimov Ya.O., Tarasov P.A. Morphometry and internal structure of ice ridges in the Kara and Laptev Seas. *Int. J. of Offshore and Polar Engineering*. 2020;30(2):194–201. <https://doi.org/10.17736/ijope.2020.jc784>
11. Strub-Klein L., Sudom D. A comprehensive analysis of the morphology of first-year sea ice ridges. *Cold Reg. Sci. Technol*. 2012;82:94–110.
12. Фролов С.В., Третьяков В.Ю., Клейн А.Э., Алексеева Т.А., Пряхин С.С. Результаты наблюдений за толщиной ледяного покрова по данным высокоширотных арктических морских экспедиций. В кн.: *И.Е. Фролов (ред.). Океанография и морской лед*. М.: Paulsen; 2011. С. 374–384.
13. Tuhkuri J., Lensu M. Laboratory tests on ridging and rafting of ice sheets. *J. Geophys. Res*. 2002;107(C9):3125.
14. Kharitonov V.V., Borodkin V.A. On the results of studying ice ridges in the Shokal'skogo Strait, part I: Morphology and physical parameters in-situ. *Cold Reg. Sci. Technol*. 2020;174:103041. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2020.103041>
15. Hibler W.D. III. Modeling a variable thickness of sea ice cover. *Mon. Wea. Rev*. 1980;108(12):1943–1973.
16. Tucker W.B. III, Govoni J.W. Morphological investigations of first-year sea ice pressure ridge sail. *Cold Reg. Sci. Technol*. 1981;5:1–12.
17. Høyland K.V. Consolidation of first-year sea ice ridges. *J. Geophys. Res*. 2002;107(C6):15,1–15,15. <https://doi.org/10.1029/2000JC000526>
18. Kharitonov V.V. On the results of studying ice ridges in the Shokal'skogo Strait, part II: Porosity. *Cold Reg. Sci. Technol*. 2019;166:102842. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2019.102842>
19. Ervik Å., Høyland K.V., Shestov A., Nord T.S. On the decay of first-year ice ridges: Measurements and evolution of rubble macroporosity, ridge drilling resistance and consolidated layer strength. *Cold Reg. Sci. and Technol*. 2018;151:196–207. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2018.03.024>
20. Shestov A.S., Marchenko A.V. Thermodynamic consolidation of ice ridge keels in water at varying freezing points. *Cold Reg. Sci. and Technol*. 2016;121:1–10. <http://dx.doi.org/10.1016/j.coldregions.2015.09.015>
21. Харитонов В.В. Некоторые результаты измерения толщины ровного льда на дрейфующей станции «Северный полюс-38». *Проблемы Арктики и Антарктики*. 2013;2(96):103–110.
Kharitonov V. Some results of measurement of level ice thickness at “North Pole-38” drifting station. *Problemy Arktiki i Antarkiki = Arctic and Antarctic Research*. 2011;2(96):103–110. (In Russ.).
22. Вершинин С.А., Трусков П.А., Кузмичев К.В. *Воздействие льда на сооружения Сахалинского шельфа*. М.: Институт «Гипростроймост»; 2005. 340 с.